

УДК 621.833

М. Т. Тарашанский, канд. техн. наук, доцент, **Е. Ю. Чалая**, ст. преподаватель.
Луганский национальный университет им. В. Даля, Луганск, ЛНР.
Тел./Факс: +38(099)9259034, E-mail: elena_chalaya@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ГЕОМЕТРИИ КРУГОВЫХ АРОЧНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ СМЕШАННОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

В статье приведены основные геометро-кинематические критерии для оценки качества арочного зацепления, зубья колес которого образованы несимметричным исходным контуром. Получены дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления с круговым зубом.

Ключевые слова: арочная зубчатая передача, синтез геометрии зуба, критерии работоспособности, смешанное зацепление, круговая продольная линия зуба.

М. Т. Tarashchanskii, E. U. Chalaya

THE DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SYNTHESIS OF GEOMETRY OF ARCH TOOTH GEARINGS OF THE MIXED GEARING WITH CIRCULAR ARCHED TEETH

The article presents main geometry and kinematical criteria for assessing the quality of the arch meshing, which are formed by asymmetric basic rack. Differential equations for the synthesis of geometry arched gear mixed engagement on these geometry and kinematical performance criteria for the top and root of the tooth.

Keywords: arch tooth gearing, synthesis of tooth geometry, performance criteria, mixed gearing, circular longitudinal line of the tooth.

Актуальность задачи. Основой высокой работоспособности, надежности и экономичности любого редуктора является высокая надежность и работоспособность входящих в него зубчатых передач. Поэтому, конструирование, изучение и производство передач с качественно новыми конструктивными и технологическими свойствами является актуальной задачей. Наиболее целесообразным и экономически оправданным путем совершенствования технического уровня зубчатых передач является синтез по критериям их работоспособности [1].

При исследовании зубчатых зацеплений возникает необходимость решения задач, связанных с определением качества зацепления. Эксплуатационные характеристики должны быть спрогнозированы уже на стадии проектирования. Поэтому необходимы расчетные критерии, связывающие конкретную эксплуатационную характеристику передачи с геометрией контактирующих поверхностей. Такие критерии получены и исследованы для прямозубых и косозубых передач с линейчатым и точечным контактом [2,3]. Для передач с арочными зубьями эти критерии исследованы в работах [4,5]. Разработанные методы синтеза передач основаны на отыскании производящей поверхности и сводятся к решению дифференциальных уравнений, описывающих геометро-кинематические критерии зубчатого зацепления через параметры производящей поверхности [3,4,5]. Однако в указанных работах не рассмотрены арочные передачи смешанного зацепления [6], которое не имеет присущих вне полюсным зацеплениям кинематических и технологических ограничений.

Для обобщения результатов, полученных в работе [4], будем рассматривать выпуклую и вогнутую стороны головки и ножки зубьев шестерни и колеса. Продольная линия по ширине зубчатого венца – окружность.

Цель статьи – получить и проанализировать дифференциальные уравнения для синтеза геометрии круговых арочных зубчатых передач смешанного зацепления по заданным геометро-кинематическим критериям.

Одним из важнейших геометрических параметров является профиль обобщенного исходного контура (ИК). Его можно представить в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x_p = f_1(\lambda); \\ y_p = f_2(\lambda); \end{cases} \quad \begin{cases} x_p = \Phi_1(\lambda); \\ y_p = \Phi_2(\lambda). \end{cases} \quad (1)$$

Если продольная линия по ширине зубчатого венца очерчена дугой окружности радиусом R_u (радиус резцовой головки), тогда кривая $\bar{r}_0(\mu)$, определяющая продольную форму зуба, в системе координат $X_n Y_n Z_n$ (рис. 1) имеет вид:

$$x_0(\mu) = 0, \quad y_0(\mu) = R_u(1 - \cos \mu), \quad z_0(\mu) = R_u \sin \mu, \quad (2)$$

где μ - угол между осью $O_n Y_n$ и текущим направлением вектора \bar{R}_u (рис. 1).

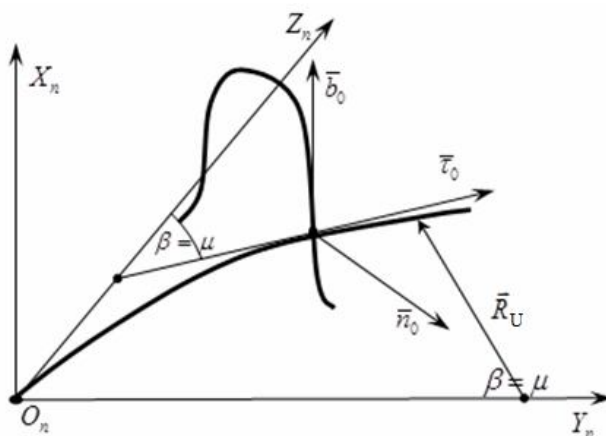


Рисунок 1. К выводу уравнения производящей поверхности с круговыми арочными зубьями

Таким образом, имеем цилиндрические зубчатые передачи с круговым зубом. Текущий угол наклона зубьев рейки с арочными зубьями: $\beta = \mu$ (рис. 1). Полагая, что плоскость $Y_n O_n Z_n$ является начальной плоскостью рейки (рис.1), а начальная прямая ИК направлена по вектору \bar{n}_0 , имеем уравнения поверхности зубьев инструментальной рейки (3) (выпуклая сторона). Уравнения поверхности зубьев рейки для вогнутой стороны могут быть получены аналогично, прибавляя $\pi/2$ к y_n .

$$\begin{cases} x_n = f_1, \\ y_n = R_u - (R_u - f_2) \cos \mu, \\ z_n = (R_u - f_2) \sin \mu; \end{cases} \quad \begin{cases} x_n = \Phi_1, \\ y_n = R_u - (R_u - \Phi_2) \cos \mu, \\ z_n = (R_u - \Phi_2) \sin \mu. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим основные геометро-кинематические критерии, необходимые для синтеза геометрии зубьев цилиндрических передач с круговыми арочными зубьями.

Скорость скольжения (для точек на головке и ножке соответственно):

$$V_{скf} = (1+1/u) f_1 \sqrt{\left(f_1' / f_2' \right)^2 \cos^2 \mu + 1}, \quad V_{ск\Phi} = (1+1/u) \Phi_1 \sqrt{\left(\Phi_1' / \Phi_2' \right)^2 \cos^2 \mu + 1}, \quad (4)$$

где u – передаточное число.

Скорости качения сопряженных поверхностей зубьев (соответственно для головки и ножки), если ω_1 – угловая скорость вращения шестерни:

$$\begin{aligned} V_{1f} &= \omega_1 n_f / \tau_f (R_1 + f_1 \Delta_f / f_2'), & V_{1\Phi} &= \omega_1 n_\Phi / \tau_\Phi (R_1 + \Phi_1 \Delta_\Phi / \Phi_2'), \\ V_{2f} &= \omega_1 n_f / u \tau_f (R_2 - f_1 \Delta_f / f_2'), & V_{2\Phi} &= \omega_1 n_\Phi / u \tau_\Phi (R_2 - \Phi_1 \Delta_\Phi / \Phi_2'). \end{aligned} \quad (5)$$

Суммарная скорость качения рабочих поверхностей:

$$V_{\Sigma f} = \frac{\omega_1 n_f}{\tau_f} \left(2R_i \pm \frac{f_1}{f_2'} \Delta_f \left(1 - \frac{1}{u} \right) \right), \quad V_{\Sigma \Phi} = \frac{\omega_1 n_\Phi}{\tau_\Phi} \left(2R_i \pm \frac{\Phi_1}{\Phi_2'} \Delta_\Phi \left(1 - \frac{1}{u} \right) \right). \quad (6)$$

Приведенная кривизна (соответственно для головки и ножки):

$$\begin{aligned} \chi_{npf} &= \frac{f_2' \tau_f^2}{n_f^3} \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{(R_2 - f_1 \Delta_f / f_2')(R_1 + f_1 \Delta_f / f_2')}, \\ \chi_{np\Phi} &= \frac{\Phi_2' \tau_\Phi^2}{n_\Phi^3} \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{(R_2 - \Phi_1 \Delta_\Phi / \Phi_2')(R_1 + \Phi_1 \Delta_\Phi / \Phi_2')}. \end{aligned} \quad (7)$$

Удельные скольжения (соответственно для головки и ножки):

$$\eta_{if} = \pm(1 + (1/u)) f_1 \Delta_f / (R_i f_2' \pm f_1 \Delta_f), \quad \eta_{i\Phi} = \pm(1 + (1/u)) \Phi_1 \Delta_\Phi / (R_i \Phi_2' \pm \Phi_1 \Delta_\Phi). \quad (8)$$

В приведенных соотношениях верхний знак соответствует выпуклой стороне зуба, нижний знак – вогнутой стороне. Имеют место следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_{1f} &= f_1 f_1' / f_2', \quad \Omega_{1\Phi} = \Phi_1 \Phi_1' / \Phi_2', \quad \Omega_{2f} = \Omega_{1f} + f_2, \quad \Omega_{2\Phi} = \Omega_{1\Phi} + \Phi_2, \\ n_f &= \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}, \quad n_\Phi = \sqrt{\Phi_1'^2 + \Phi_2'^2}, \quad K_{nf} = 1/(R_u + f_2), \quad K_{n\Phi} = 1/(R_u + \Phi_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_f &= \sqrt{n_f^2 \sin^2 \mu (1 + \Omega_{1f} K_{nf})^2 + (\Omega_{2f}')^2 \cos^2 \mu}, \\ \tau_\Phi &= \sqrt{n_\Phi^2 \sin^2 \mu (1 + \Omega_{1\Phi} K_{n\Phi})^2 + (\Omega_{2\Phi}')^2 \cos^2 \mu}, \\ \Delta_f &= \Omega_{2f}' \cos^2 \mu + f_2' (1 + \Omega_{1f} K_{nf}) \sin^2 \mu, \\ \Delta_\Phi &= \Omega_{2\Phi}' \cos^2 \mu + \Phi_2' (1 + \Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}) \sin^2 \mu. \end{aligned}$$

Кроме перечисленных критериев качества необходимо также рассматривать ограничения параметров ИК [4, 5], а именно коэффициенты перекрытия, а также факторы, негативно влияющие на качество работы зубчатой передачи. При синтезе ИК необходимо ограничивать производящую поверхность, исключая на ней особые точки.

Учитывая, что функции, определяющие продольную форму зубьев, заданы (2), а неизвестными являются функции f_1, f_2 и Φ_1, Φ_2 , задающие конфигурацию ИК (1), а значит и режущего инструмента, делаем вывод, что полученные формулы (4)-(8) для геометро-кинематических критериев являются дифференциальными уравнениями. Их можно использовать для определения геометрии ИК режущего инструмента при нарезания арочных зубьев. Полагая, что $f_2 = f_2(f_1)$, а также $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$, имеем:

$$f_1' = 1, \quad f_1'' = 0, \quad \Phi_1' = 1, \quad \Phi_1'' = 0. \quad (9)$$

1. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданной относительной скорости (4).

$$f_2' = \pm \frac{\omega_1(1+(1/u))f_1 \cos \mu}{\sqrt{V_{ck}^2 - \omega_1^2(1+(1/u))^2 f_1^2}}, \quad \Phi_2' = \pm \frac{\omega_1(1+(1/u))\Phi_1 \cos \mu}{\sqrt{V_{ck}^2 - \omega_1^2(1+(1/u))^2 \Phi_1^2}} \quad (10)$$

2. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданным скоростям качения (5).

$$\begin{aligned} f_2'' &= \frac{1}{f_1} \left[f_2'^3 - \left(\left(-B_{ViI} \pm \sqrt{B_{ViI}^2 - 4A_{ViI}C_{ViI}} \right) / 2A_{ViI} \right) f_2'^2 + f_2' \right], \\ \Phi_2'' &= \frac{1}{\Phi_1} \left[\Phi_2'^3 - \left(\left(-B_{ViII} \pm \sqrt{B_{ViII}^2 - 4A_{ViII}C_{ViII}} \right) / 2A_{ViII} \right) \Phi_2'^2 + \Phi_2' \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты A_{Vi}, B_{Vi}, C_{Vi} уравнений (11) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_{ViI} &= \left(V_i^2 / \omega_1^2 n_f^2 \right) \cdot \cos^2 \mu - c_{viI}^2, \quad A_{ViII} = \left(V_i^2 / \omega_1^2 n_\Phi^2 \right) \cdot \cos^2 \mu - c_{viII}^2, \\ B_{ViI} &= \mp 2R_i c_{viI} a_{viI} - 2c_{viI} a_{viI}, \quad B_{ViII} = \mp 2R_i c_{viII} a_{viII} - 2c_{viII} a_{viII}, \\ C_{ViI} &= \left(V_i^2 / \omega_1^2 n_f^2 \right) \cdot b_{viI} - \left(R_i \pm a_{viI} \right)^2, \quad C_{ViII} = \left(V_i^2 / \omega_1^2 n_\Phi^2 \right) \cdot b_{viII} - \left(R_i \pm a_{viII} \right)^2. \end{aligned}$$

Индексы: f и I – для головки, Φ и II – для ножки зуба. Для нахождения коэффициентов a_{vi}, b_{vi}, c_{vi} используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_{vi} &= \begin{cases} I \left\{ f_1 (1 + \Omega_{1f} K_{nf}) \sin^2 \mu, \right. \\ II \left\{ \Phi_1 (1 + \Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}) \sin^2 \mu, \end{cases} \quad b_{vi} = \begin{cases} I \left\{ n_f^2 (1 + \Omega_{1f} K_{nf})^2 \sin^2 \mu, \right. \\ II \left\{ n_\Phi^2 (1 + \Omega_{1\Phi} K_{n\Phi})^2 \sin^2 \mu, \end{cases} \\ c_{vi} &= \begin{cases} I \left\{ f_1 \cos^2 \mu / f_2', \right. \\ II \left\{ \Phi_1 \cos^2 \mu / \Phi_2'. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Дифференциальные уравнения по заданной суммарной скорости (6) качения имеют вид (11), только с коэффициентами $A_{V\Sigma}, B_{V\Sigma}, C_{V\Sigma}$, которые определяются аналогично коэффициентам A_{Vi}, B_{Vi}, C_{Vi} , причем имеют место формулы для вспомогательных коэффициентов (для головки и ножки соответственно):

$$\begin{aligned} a_{V\Sigma I} &= (1 - (1/u)) f_1 (1 + \Omega_{1f} K_{nf}) \sin^2 \mu, \quad a_{V\Sigma II} = (1 - (1/u)) \Phi_1 (1 + \Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}) \sin^2 \mu, \\ c_{V\Sigma I} &= (1 - (1/u)) \cdot (f_1 / f_2') \cos^2 \mu, \quad c_{V\Sigma II} = (1 - (1/u)) \cdot (\Phi_1 / \Phi_2') \cos^2 \mu. \end{aligned}$$

4. Дифференциальные уравнения по заданной приведенной кривизне (7) имеют вид (11), но с коэффициентами $A_{V\chi}, B_{V\chi}, C_{V\chi}$, которые находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_{\chi I} &= f_2' (R_1 + R_2) \cos^2 \mu + c_{V1}^2 \chi_{npf} n_f^3, \quad A_{\chi II} = \Phi_2' (R_1 + R_2) \cos^2 \mu + c_{V2}^2 \chi_{np\Phi} n_\Phi^3, \\ B_{\chi I} &= \chi_{npf} n_f^3 (2c_{V1} a_{V1} + c_{V1} (R_1 - R_2)), \quad B_{\chi II} = \chi_{np\Phi} n_\Phi^3 (2c_{V2} a_{V2} + c_{V2} (R_1 - R_2)), \\ C_{\chi I} &= (R_1 + R_2) f_2' b_{V1} - \chi_{npf} n_f^3 (R_1 + a_{V1})(R_2 - a_{V1}), \\ C_{\chi II} &= (R_1 + R_2) \Phi_2' b_{V2} - \chi_{np\Phi} n_\Phi^3 (R_1 + a_{V2})(R_2 - a_{V2}). \end{aligned}$$

5. Дифференциальные уравнения по заданным коэффициентам удельных скольжений (8) (для головки и ножки зуба соответственно):

$$f_2'' = \frac{f_2'^2}{f_1 f_1'} \left[\frac{f_1'^2 + f_1 f_1''}{f_2'} + f_2' - \frac{C_{\eta f}}{B_{\eta f}} \right], \quad \Phi_2'' = \frac{\Phi_2'^2}{\Phi_1 \Phi_1'} \left[\frac{\Phi_1'^2 + \Phi_1 \Phi_1''}{\Phi_2'} + \Phi_2' - \frac{C_{\eta \Phi}}{B_{\eta \Phi}} \right].$$

Здесь имеют место обозначения (для головки и ножки зуба соответственно):

$$C_{\eta f} = R_i f_2' \eta_{if} \pm f_1 f_2' (1 + \Omega_{1f} / (R_u + f_2)) \sin^2 \mu (\eta_{if} - (1 + (1/u))),$$

$$C_{\eta \Phi} = R_i \Phi_2' \eta_{i\Phi} \pm \Phi_1 \Phi_2' (1 + \Omega_{1\Phi} / (R_u + \Phi_2)) \sin^2 \mu (\eta_{i\Phi} - (1 + (1/u)));$$

$$B_{\eta f} = \mp f_1 \cos^2 \mu (\eta_{if} - (1 + (1/u))), \quad B_{\eta \Phi} = \mp \Phi_1 \cos^2 \mu (\eta_{i\Phi} - (1 + (1/u))).$$

В качестве критерия синтеза может быть выбран любой показатель качества из построенной системы и соответствующие ему дифференциальные уравнения. Этот выбор зависит от назначения конкретной зубчатой передачи.

Анализ полученных формул показывает, что уменьшение приведенной кривизны (7) оказывает положительное влияние на все геометро-кинематические критерии. Поэтому, в основу синтеза геометрии круговых арочных зубьев усовершенствованных передач можно положить ее синтез по заданной приведенной кривизне, обеспечивая наименьшее ее значение в пределах поля зацепления.

Выводы.

1. В статье приведены зависимости для определения геометро-кинематических критериев оценки качества арочного зацепления, зубья которого образованы несимметричным исходным контуром.

2. На основе этих зависимостей получены дифференциальные уравнения для синтеза геометрии круговых арочных зубчатых передач смешанного зацепления по геометро-кинематическим критериям работоспособности для головки и ножки зуба.

3. Полученные функциональные зависимости могут быть использованы при проектировании новых арочных зубчатых передач смешанного зацепления, нарезаемых круговыми резцовыми головками, а также при анализе показателей работоспособности арочных передач смешанного зацепления с круговыми зубьями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шишов, В. П. Філь П.В. Теоретичні основи синтезу передач зацепленням: Монографія / В. П. Шишов, П. Л. Носко, П. В. Філь – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2006. – 408 с.

2. Гавриленко, В. А. Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач. В. А. Гавриленко – М.: Машгиз, 1949. – 399 с.

3. Грибанов, В. М. Математические модели производства зубчатых цилиндрических передач Новикова / В. М. Грибанов, Ю. В. Грибанова – Луганск: Изд-во ВНУ им. В. Даля, 1999.

4. Шишов, В. П. Циліндричні передачі з арковими зубцями (теорія, аналіз, синтез): Монографія / В. П. Шишов, П. Л. Носко, О. А. Ревякіна – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2014.

5. Шишов, В. П. Високонантажені циліндричні передачі з двоопукло-ввігнутими зубцями: Монографія / В. П. Шишов, П. Л. Носко, П. М. Ткач, П. В. Філь – Луганськ: СНУ ім. В. Даля, 2013. – 216 с.

6. Журавлев, Г. А. О развитии формы профиля зубьев зубчатых колес / Г. А. Журавлев // Труды VI Международного симпозиума «Теория реальных передач зацеплением». – Курган, 1997. – № 53-57.

7. Шишов, В. П. Дифференциальные уравнения для синтеза цилиндрических зубчатых передач с корсетными зубьями / В. П. Шишов, П. Н. Ткач, О. А. Ревякина // Вестник ХГПУ. Сб. науч. работ. – Харьков, 2000. – Вып. 109. – С. 82-87.

Поступила в редколлегию 16.03.18 г.